# La formazione delle strutture.*

Andrea De Paoli

Astrofisica a.a. 1995-1996, Prof. Melchiorri

## Contents


**1 Introduzione** **2**

**2 Anisotropie** **2**
- 2.1 Descrizione qualitativa . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3
- 2.2 Considerazioni preliminari . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4
- 2.3 Perchè il modello inflazionario . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

**3 L'inflazione** **7**
- 3.1 Le perturbazioni . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
- 3.2 Evoluzione delle perturbazioni di densità (non concluso) . . . 9

**4 Conclusione** **10**

**A Riferimenti teorici** **12**
- A.1 Lo spettro delle perturbazioni . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12
- A.2 La varianza di massa . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
- A.3 Lo spettro primordiale . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13

**B La storia (semplificata) dell'universo.** **15**


*Preparata con il sistema LaTeX.

# 1 Introduzione

Uno dei problemi centrali della cosmologia si potrebbe risolvere se si arrivasse alla conoscenza dello spettro primordiale delle perturbazioni e della sua evoluzione. Spesso si ipotizza uno spettro relativo ad un tempo primordiale, nell'ambito di un modello teorico, e si analizza la sua evoluzione. Uno spettro adeguato dovrebbe fornire strutture le cui caratteristiche concordano con quelle osservate.

# 2 Anisotropie

Dalle anisotropie della RDFC possiamo scoprire molto riguardo le formazioni e evoluzioni delle fluttuazioni, e di come si sono evolute a diventare le strutture nell'universo osservato. Lo spettro è particolarmente ricco su scala piccola (al di sotto del grado) dovuto alle oscillazioni prima che la materia diventasse neutra, quando le onde (acustiche) "fissarono" molti parametri cosmologici, come $\Omega_o$, il contenuto barionico $\Omega_B$ e la costante di Hubble $H_o$.

Nel modello standard i fotoni che osserviamo non interagirono più con la materia da circa $z = 1000$, quando l'orizzonte di allora è sotteso da un angolo di $1^o$, e solo su questa scala (angolare) o meno possono essere avvenuti processi fisici significativi.

Dalla "sfera" dell'ultimo scattering a $z = 1000$ noi vediamo le perturbazioni di temperatura come anisotropie sia dalla modifica di energia negli elettroni nel loro viaggio verso di noi. Per lunghe onde di perturbazioni (di densità o potenziali) si manifestano come perturbazioni di tempreatura che noi rileviamo come anisotropie su larga scala. Mentre i processi fisici *della* superficie stessa si manifestano come picchi (in particolare nello spettro intorno a $\ell \approx 200$ cioè $\theta \approx .5'$.

Finchè i fotoni e barioni erano accoppiati (principalmente dallo scattering di Compton) essi agivano come un "plasma" la cui pressione era fornita dai fotoni. Questo plasma subiva delle oscillazioni "acustiche" e con il crescere dell'orizzonte addensamenti di lunghezza sempre più grande riuscivano ad entrare. Appena l'addensamento entra esso collassa sotto la propria forza gravitazionale, fino a che la pressione dei fotoni ne risente e in tal modo inizia un'oscillazione (che può essere descritta da un'equazione di oscillatore armonico).

Quando il "plasma" si raffreddó abbastanza da permettere ai protoni di catturare i fotoni e formare l'idrogeno neutro i barioni e la radiazione si "separano"

## 2.1 Descrizione qualitativa

In un universo in espansione le fluttuazioni di densità non crescono abbastanza in fretta per poter diventare le strutture a scala galattica o oltre e serve quindi trovare la fonte delle perturbazioni primordiali. Uno spettro di fluttuazioni primordiali può produrre delle strutture connesse la cui scala cresce in proporzione all'orizzonte e alla massa contenuta (massa dell'orizzonte). L'universo espande e viene impressa (nel cambiamento di stato) una scala dell'ordine di $10^{16}$ masse solari. I modelli di materia scura fredda (CDM) e di materia scura calda (HDM) spiegherebbero in maniera diversa come queste fluttuazioni poi evolvono (nessuna da sola in maniera del tutto soddisfacente).

La distribuzione di massa è altamente irregolare su piccola scala e diventa più omogenea su scala più vasta. Un processo plausibile è che strutture piccole si aggregano formando strutture più grandi, ciò richiederebbe fluttuazioni di densità più grandi su piccola scala. Le proprietà statistiche delle fluttuazioni $\delta(\vec{x})$ sono specificate dallo spettro di potenza $P(k)$ (posto come $|\delta_k|$, dove $k$ è il numero d'onda, e $\delta(x)$ ha una distribuzione Gaussiana.

Scegliamo per semplicità uno spettro dato da una legge di potenza in cui le proprietà statistiche sono invarianti a meno di un fattore costante, finchè le fluttuazioni di una determinata scala sono lineari (cioè piccole) cresceranno (*in modo regolare*). Consideriamo una massa $M$ contenuta in una risoluzione spaziale di raggio $R$, quando la varianza di massa

$$\frac{\langle \delta M^2 \rangle}{\langle M \rangle^2}$$

cresce fino a non essere più di ampiezza lineare (maggiore di uno) non partecipa più all'espansione generale e cresce come un "oggetto cosmico" di scala che cresce rapidamente per $n < 0$ (diverge per $n \to -3$) e cresce lentamente per $n > 0$.

Se l'indice $n$ della legge di potenza viene considerato un parametro libero possiamo allora imporre un valore che faccia crescere la perturbazione proporzionalmente alla scala dell'orizzonte.

Lo spettro di scala invariante, *spettro di Zeldovich*, dà un "*pattern*" statisticamente invariante se si misura l'universo in espansione su scala comovente (cioè un raggio d'orizzonte costante).

Osservazioni fatte delle fluttuazioni del fondo cosmico sono consistenti con uno spettro con invarianza di scala con un'ampiezza su scala dell'orizzonte dell'ordine di $10^{-4}$.

Nell'universo attuale il contributo alla densità è data principalmente dalla materia, ma nel passato era dominante la densità di energia. Nelle fluttuazioni adiabatiche la densità di materia varia in sincronia con le variazioni di densità di energia (la densità di radiazione risulterebbe costante con fluttuazioni isoterme), e sembrano più plausibili le fluttuazioin adiabatiche.

Nel modello CDM le fluttuazioni che sono entrate nell'orizzonte prima della transizione ad universo dominato dalla materia (nel tempo $t_{eq}$), non crescono fino al momento $t_{eq}$ stesso, e quelle entrate dopo crescono senza interruzione e l'indice spettrale varia (gradualmente ?) da $n = 1$ a $n = -3$ (e l'indice spettrale associato alle galassie è dell'ordine di $n = -2$.

Nel modello HDM i neutrini (con massa dell'ordine di $10eV$) "cancellano" le fluttuazioni piccole (al di sotto dell'orizzonte) finchè la temperatura dell'universo è maggiore della massa a riposo del neutrino. Rimangono inalterate solo le fluttuazioni grandi abbastanza da entrare nell'orizzonte dopo che i neutrini siano diventati non relativistici. In questo modello le prime strutture a formarsi sono quelle "top-down".

Lo spettro, relativo alle conoscenze osservative attuali, che sembra essere fra i migliori è lo spettro di Zeldovich, chiamato anche spettro di "*cosmological white noise*", ipotizzato[1] mentre si investigavano le perturbazioni acustiche adiabatiche (e isoterme) primordiali nell'ambito del modello inflazionario. Queste fluttuazioni di carattere quantistico su scale microscopiche risultano poi essere di scala di interesse cosmologico nel periodo di inflazione e rientrano nell'orizzonte dopo la fine dell'era inflazionaria,[2] anche se rimane una certa insoddisfazione da un punto di vista "estetico" nel dover "mescolare" i modelli CDM, HDM e forse una costante cosmologica non nulla.

## 2.2 Considerazioni preliminari

A partire da un modello cosmologico, per esempio Friedmann-Lemaître, la costruzione di una teoria della formazione delle galassie, richiede delle scelte

[1]indipendentemente da Harrison, Peebles e Zeldovich.

[2]scoperto da Hawking, Starobinsky, Guth e Pi.

sui parametri. Per esempio decidere se sezioni dello spazio devono essere (cosmologicamante) curve o piatte, e come dev'essere la densità di materia. Un modello piatto concorda con l'inflazione, che è sicuramente una delle immagini migliori che abbiamo dell'universo primordiale. Dagli attuali dati osservativi il parametro di densità risulterebbe al di sotto di uno, ma potrebbe non essere accettabile (fra le altre cose implicherebbe che siamo degli osservatori privilegiati comparsi proprio mentre l'universo si sta allontanando dall'essere dominato dalla sua densità di massa).

Bisogna anche decidere quali sono i contributi principali alla massa dell'universo e la causa degli stress che hanno fatto si che la materia si raccogliesse nelle strutture osservate. Infine sarebbe un grande passo avanti capire che cosa sono i "semi" (*seeds*) gravitazionali delle strutture. Si potrebbe assumere che si sviluppino senza bisogno di specificare le condizioni iniziali, come la turbolenza di un liquido che fluisce in un tubo sottoposto ad una instabilità esponenziale, altrimenti consideriare la crescita gravitazionale delle fluttuazioni della massa in un universo in espansione sottoposto ad una instabilità a legge di potenza, in qual caso vi sono dei vincoli specifici sulle condizioni iniziali.

Se le disomogeneità primordiali sono state prodotti durante l'inflazione possiamo ragionevolmente assumere che siano adiabatiche, isocurvature o una combinazione delle due e inoltre gaussiane e invarianti in scala.

Questo è il modello su cui ci concentreremo, dopotutto, come dice Peebles, "*le lezioni più utili si possono anche imparare dai problemi [che questi modelli hanno] perchè sicuramente ci indicherà come possiamo migliorare le nostre idee.*"[8]

Il modello inflazionario fornisce delle previsioni sull'impatto che le fluttuazioni di densità hanno sullo spettro di potenza primordiale.

Adotteremo il paradigma di una fase inflazionaria che porta l'universo verso (iper)-superfici piatte, cioè, come si assume di solito, $\Omega_o = 1$ oppure, introducendo una costante cosmologica, $\Omega + \Lambda/3H^2 = 1$. Le fluttuazioni che causano anisotropie nella radiazione di fondo vengono generate da fluttuazioni nei campi quantistici del campo scalare $\phi$ (il campo inflatone) durante la fase inflazionaria. e lunghezze d'onda delle fluttuazioni vengono "stirate" dall'espansione fino a che rappresentano dei modi ("*modes*") al di fuori dell'orizzonte e l'ampiezza dei modi viene "fissata". Quando l'inflazione termina l'orizzonte cresce più del fattore di scala e le fluttuazioni "*rientrano*" nell'orizzonte, e da qui evolvono in maniera classica.

Durante l'inflazione la scala è determinata dalla costante di Hubble nel momento che il modo $k$ abbia lasciato l'orizzonte. Per fluttuazioni non di isocurvatura, per esempio fluttuazioni nel campo scalare inflatone, adiabatiche e fonte primaria di perturbazioni, la densità di energia associata con le fluttuazioni cresce mentre è fuori dall'orizzonte.

Se la "costante" di Hubble cresce lentamente durante l'inflazione lo spettro sarà uno spettro di Harrison-Zeldovich (invariante di scala). Dalle equazioni di Friedmann, se $H_k$ è quasi costante allora lo sarà anche $V$, e meno la variazione di $V$ più fluttazioni adiabatiche cresceranno.

La teoria forse più accreditata attualmente è il cosidetto modello Mixed Dark Matter che ha componenti dal modello (ormai abbandonato) HDM di relitti cosmologici (p. es. neutrini con massa $m_\nu \approx 7eV$, che compongono il 30 % e il resto di componenti CDM e barioni.

Le fluttuazioni iniziali si assumono abbiano una distribuzione Gaussiana, adiabatiche con spettro piatto su larga scala.

Lo spettro di potenza $P_{mat}(k) \propto k^n$ con $n = 1$ per un "range" dei numeri d'onda. In generale $n > -3$ a grandi scale (a $k \to 0$) e $n < -3$ per piccole scale. L'inversione avviene a $t_{eq}$. Questo è dovuto al fatto che le perturbazioni che entrano l'orizzonte prima del dominio della materia non crescono, quindi le piccole perturbazioni trascorrono più tempo all'interno dell'orizzonte durnate l'era dominata dalla radiazione. Dal punto di vista matematico si può anche vedere dalla converegenza della varianza

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty = P(k) k^2 \, dk$$

se lo spettro delle perturbazioni, elmeno entro un certo intervallo è dato dalla legge di potenza, l'indive spettrale $n$ non può essere costante su tutto il range dei numeri d'onda.

## 2.3 Perchè il modello inflazionario

I vari metodi di caratterizzare la disomogeneità nella distribuzione di materia nell'universo, per esempio usando la funzione di correlazione ad $n$-punti indicano dei raggruppamenti e vuoti, e su certe scale ci sono anche variazioni significative variazioni del contrasto di densità. Serve quindi riconciliare l'esistenza di strutture a piccola scala (galassie, gruppi e ammassi) con l'omogeneità generale dell'universo, e dunque spiegare queste disomogeneità.

Si potrebbe tentare di ottenere modelli cosmologici più realistici con un tensore momento-energia $T_{ik}(t, \mathbf{x})$ disomogeneo e anisotropo. L'esatta metrica $g_{ik}(t, \vec{x})$ che si otterrebbe sarebbe più esatto Sarebbe molto difficile però portare avanti questo modello per via delle difficoltà nel trovare soluzioni disomogenee alle equazioni di Einstein.

Più popolare è l'approcio alternativo: assumere che an un'epoca primordiale le variabili avessero piccole deviazioni intorno ai loro valori medi, quindi una perturbazione della metrica della forma $g_{\alpha\beta} = \bar{g}_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}$ e del tensore momento energia $T_{\alpha\beta} = \bar{T}_{\alpha\beta} + \delta T_{\alpha\beta}$ con le loro piccole correzioni. Una volta linearizzata le equazioni di Einstein si può studiare la crescita lineare delle perturbazioni. In circostanze favorevoli le perturbazioni della materia possono crescere e raggiungere valore paragonabili ai loro valori medi in un tempo finito. La regione quindi si disaccoppia dall'espansione dell'universo e collassa ulteriormente. Per grandi linee si pensa che le strutture siano sorte in questo modo, ma quando si guarda in dettaglio sorgono alcuni problemi.

Il primo è che non vi sono origini "naturali" per le perturbazioni di densità e quelle dovute ad effetti quantistici non si possono stimare e il secondo problema è che il contrasto di densità ottenuto è insufficiente per produrre le strutture conosciute di un universo puramente barionico.

Il terzo problema ci interessa di più e conviene approfondire un pò.

Questo porta a perturbazioni di masse dell'ordine di una galassia oltre al raggio di Hubble per redshift olte $10^6$. Poichè si assume che processi fisici possono essere coerenti solo su scale minori del raggio di Hubble ci si trova con la contradizione di processi che dovevano operare su scale inferiori a $cH^{-1}(t_i)$ ma le scale astrofisiche erano già oltre $cH^{-1}(t_i)$ ad epoche abbastanza remote. Quindi non si hanno dei processi fisici che possano aver contribuito all'origine delle perturbazioni.

# 3 L'inflazione

L'aspetto più attraente dell'inflazione è la possibilità che possa fornire la spiegazione dei semi perturbativi che hanno poi prodotto le strutture che oggi vediamo.

## 3.1 Le perturbazioni

Sebbene in linea di principio è possibile costruire un modello di tale scenario estrapolando all'indietro dalle osservazioni di $\rho(\vec{x}, t_o)$ in pratica non abbiamo dati sufficientemente precisi e inoltre le strutture sono il risultato di complesse evoluzioni nonlineari nel periodo $0 < z < 30$. Sarà sicuramente più utile adottare un approcio indiretto.

Sappiamo dalle osservazioni della radiazione di fondo che le perturbazioni di densità devono essere state piccolissime, $(\delta\rho/\rho \ll 1)$ all'epoca del disaccoppiamento $(z \approx 10^3)$.

Queste scale sono entrate nel raggio di Hubble, dato da

$$cH^{-1}(t) = c(\dot{R}/R)^{-1}$$

prima del disaccoppiamento [6] nell'era dominata dalla radiazione. Si possono caratterizzare completamente le perturbazioni di densità specificando le ampiezze di ogni perturbazione quando entrano nel raggio di Hubble, cioè specificando la funzione

$$F(\vec{k}) \equiv \left|\delta(\vec{k}, t)\right|^2_{t_e(\vec{k})} = \left|\delta\left(\vec{k}, t_e(\vec{k}\right)\right|^2 \qquad (1)$$

dove $t_e(\vec{k})$ è il tempo in cui la perturbazione identificata da $\vec{k}$ entra nel raggio di Hubble, $cH^{-1}(t_e) = 2\pi\vec{k}^{-1}R(t_e)$.

Per seguire l'evoluzione di una perturbazione sfrutteremo lo studio della teoria delle perturbazioni lineari. Perturbazioni con $\lambda < \lambda_{eq} \simeq 13$ Mpc $(\Omega h^2)^{-1}\theta^2$ con massa $M_{eq} = 3.19 \times 10^{14} M_\odot (\Omega h^2)^{-2}\theta^6$ entrati nel raggio di Hubble nell'era della radiazione, crescono per un fattore piccolissimo fino al tempo $t_e$ e in seguito crescono in proporzione a $R(t)$. Mentre perturbazioni con $\lambda > \lambda_{eq}$ entrano nel raggio quando l'universo è dominato dalla materia e crescono[3] come $R(t)$. Scale con $\lambda > cH^{-1}(t)$ si trovano ancora fuori dal raggio di Hubble e crescono come $R^2(t)$ nella fase radiativa e come $R(t)$ nell'era dominata dalla materia.

La quantità $k^3|\delta_k|^2$ è legato alla fluttuazione dello scarto quadratico medio nella massa $M(r)$ contenuta in una grandezza $r$, e per uno spettro a legge di potenza $|\delta_k|^2 \propto k^n$ il valore medio di $\langle(\delta M/M)^2\rangle$ in una regione di grandezza $r$ è proporzionale a $k^3|\delta_k|^2$ a $k = r^{-1}$

Si possono, inoltre, ottenere dei vincoli sulla forma e ampiezza dello spettro dai limiti sulle anisotropie della radiazione di fondo. Una perturbazione di misura $\lambda$ produce delle anisotropie nella radiazione di fondo a scala angolare $\theta \simeq 0.55'\Omega h(\lambda/1\ Mpc)$, mentre scale tali che sottendono un angolo $\theta_H \simeq 0.87^o\Omega^{1/2}(z_d/1000)^{-1/2}$ entrano il raggio di Hubble al momento di

[3]per lunghezze d'onda maggiori della lunghezza di Jean, il che è di solito verificata per le scale sotto esame.

disaccoppiamento $t_d$ e anisotropie ad angoli maggiori di $\theta_H$ sono dovute a perturbazioni ancora al di fuori del raggio di Hubble nel tempo di disaccoppiamento e sono dovute all'effetto Sachs-Wolfe. Fluttuazioni su scale più piccole sono dovute a barioni accoppiati con i fotoni. L'uniformità dovuta ai limiti su $(\Delta T/T)$ suggerisce che $(n+3) \geq -0.1$, e per evitare il problema di avere troppi buchi neri compatti è preferibile avere $(n+3) \leq -0.2$. Tutto ciò sembra indicare uno spettro con $n = -3$ con ampiezza circa $10^{-6}$ o $10^{-4}$ quando una perturbazione entra il raggio di Hubble.

Da considerazioni teoriche Harrison e Zeldovich avevano sostenuto che le perturbazioni avesserò un indice $n = -3$ nel momento di entrare il raggio di Hubble e quindi $k^3 F(\vec{k})$ sarebbe una costante, e, quindi, $\langle(\delta M/M)^2\rangle$ indipendente dalla scala $R$ nel momento in cui entra nell'orizzonte. (La fluttuazione della massa $M$ è contenuta in una distanza $R$).

## 3.2 Evoluzione delle perturbazioni di densità (non concluso)

Per poter utilizzare la teoria delle perturbazioni lineari assumiamo che le deviazioni dall'omogeneità dovute ad instabilità gravitazionale siano state piccole. Queste sono cresciute per un certo periodo di tempo e hanno formato le strutture (galassie, ammassi ecc.) Vorremmo vedere gli effetti dei vari processi dissipativi sull'evoluzione delle disomogeneità. Chiaramente per essere più completi si dovrebbe anche studiare un'evoluzione non lineare, e inoltre non assumere semplicemente l'esistenza delle disomogeneità, ma trovare un fenomeno fisico che le potrebbe produrre.

Una perturbazione della metrica si può denotare come $(\delta g_{\alpha,\beta}, \delta T_{\alpha,\beta})$. Se è piccola allora possiamo ottenere, linearizzando le equazioni di Einstein, una equazione differenziale del secondo ordine della forma $\hat{\mathcal{L}}(g_{\alpha,\beta})\delta g_{\alpha,\beta} = \delta T_{\alpha,\beta}$. Essendo lineare si può espandere (per semplicità assumiamo che le onde siano piatte e eseguendo una trasformata di Fourier possiamo ottenere un insieme di equazioni per ogni "*mode*" identificato da un vettore d'onda $\vec{k}$. Però c'è un'ambiguità dovuta al fatto che cambiando coordinate (anche in modo banale) si possono ottenere perturbazioni che crescono o diminuiscono.

Per scale molto più piccole del raggio di Hubble gli effetti relativistici sono trascurabili e si potrebbe applicare la gravitazione Newtoniana. Sfortunatamente però, data una lunghezza d'onda $\lambda$ qualunque, ci sarà un'epoca abbstanza in anticipo tale che $\lambda > H$ quindi si può applicare un'analisi newtoniana solo per tempi molto maggiori del tempo di entrata nel raggio di Hubble. Dunque bisogna in ogni modo affrontare il problema della relatività generale.

Un approcio sarebbe di costruire quantità scalari e le equazioni vengono riscritte per queste quantità invaianti di "gauge". Però questo è non solo complicato ma non possiede nemmeno una interpretazione semplice. Rimane allora di scegliere un sistema di coordinate (fisicamante motivato) e risolvero direttamente e completamente all'interno di quel sistema di coordinate. Anche con questo approcio rimangono delle ambiguità residue di gauge ma è più facile da risolvere.

Consideriamo un universo con tre componenti principali: barioni ($\rho_b$), materia scura ($\rho_{dm}$, per esempio WIMP sia "hot" che "cold") e materia relativistica ($\rho_\gamma$) come fotoni. I WIMP si possono essere disaccoppiati ad una temperatura $T = T_D$ e diventati non relativistici ad una temperatura oltre $T$ corrispondente a $5.5eV$, quindi oltre $T_{eq}$ ad un tempo inferiore a $t_{eq}$. L'evoluzione dei vari componenti, essendo diversa per ciascuno, verrà trattata singolarmente.

Ogni componente può essere specificato da un'equazione di stato della forma $p_i = w_i \rho_i$ che lega la pressione del $i$-esimo componente con la sua densità $\rho_i$ tramite la costante $w_i$. La materia non relativistica ha una pressione $p_i \approx 0$ e la radiazione $p_\gamma = (1/3)\rho_\gamma$.
continuare sezione

# 4 Conclusione

Nell'ambito del modello standard sembrano esserci vari motivi validi per assumere che l'universo primordiale avesse avuto ben presto una brevissima era di inflazione. Senza l'inflazione l'universo sarebbe o collassato o diventato vuoto nell'arco di breve tempo a meno che il parametro di densità non fosse estremamente vicino al valore di uno, mentre l'inflazione porta il parametro di densità a uno, pur partendo da un valore iniziale arbitrario.

C'è anche il tema della omogeneità e isotropia. Le fluttuazioni su scala comovente genera perturbazioni che spiegano bene la disomogeneità e anisotropia dell'universo osservabile, proprio perchè l'inflazione prevede una perturbazione di densità (adiabatica)

Certo che le teorie, anche le più attraenti, devono poi fare i conti con i dati osservativi. La quantità di dati sta aumentando enormemente. Si stanno facendo nuovi passi avanti nelle metodologie di osservazione e anche nell'analisi dei segnali per rilevare le strutture a larga scala.[3] Le più recenti confermano che a larga scala la distribuzione delle galassie sia omogenea e isotropa, mentre a scale più piccole c'è una gerarchia di strutture, vuoti, galassie isolate, gruppi e infine ammassi.

Qualsiasi teoria dovrà essere in grado di spiegare quello che osserviamo, e non solo grazie ad un "*fine tuning*" dei parametri. Nella conclusione dell'articolo di Fukugita [2] troviamo alcuni esempi delle sfide che le osservazioni di oggi pongono alle teorie dell'origine delle galassie e la loro distribuzione su larga scala.

# A Riferimenti teorici

## A.1 Lo spettro delle perturbazioni

Consideriamo un volume $V_u$ di lato $L \gg l_s$ e $\langle \rho \rangle$ la sua densità media, e $\langle \rho(\vec{x}) \rangle$ la densità nel punto. La fluttuazione

$$\delta(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x}) - \langle \rho \rangle}{\langle \rho \rangle} \tag{2}$$

può essere sviluppate in serie di Fourier

$$\delta(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \sum_{\vec{k}} \delta^*_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{3}$$

che per la realtà di $\delta(\vec{x})$ sia ha che $\delta^*_{\vec{k}} = \delta_{-\vec{k}}$ e dove $\vec{k}$ è il numero d'onda, per le condizioni di periodicità $\delta(L, y, z) = \delta(0, y, z)$, $\delta(x, L, z) = \delta(x, 0, z)$ e $\delta(x, y, L) = \delta(x, y, 0)$

$$\vec{k}_x = \left( n_x \frac{2\pi}{L}, n_y \frac{2\pi}{L}, n_z \frac{2\pi}{L} \right) \tag{4}$$

con $n_x, n_y, n_z \in \mathbf{Z}$. I coefficienti di Fourier $\delta_{\vec{k}}$ sono complesse date da

$$\delta_{\vec{k}} = \frac{1}{V_u} \int_{V_u} \delta(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{x} \tag{5}$$

dove per la conservazione della massa in $V_u$ si ha che $\delta_{\vec{k}=0} = 0$

Dato un numero grande di volumi si può avere la distribuzione di probabilità $\mathcal{P}(\delta_{\vec{k}})$ dei coefficienti.

Per la proprietà di omogeneità e di isotropia dell'universo su grandi scale $\delta_k$ dipende solo dal modulo del numero d'onda $\vec{k}$ e non dalla sua direzione.

La varianza (il valore della media quadratica) è

$$\sigma^2 \equiv \left\langle \delta^2 \right\rangle = \sum_{\vec{k}} \left\langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \right\rangle = \frac{1}{V_u} \sum_{\vec{k}} \delta^2_{\vec{k}} \tag{6}$$

e facendo tendere $V_u$ all'infinito, e ponendo $\delta^2_{\vec{k}} = P(k)$, dove la quantità $P(k)$ si chiama spettro di potenza delle perturbazioni, si ottiene

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) k^2 \, dk \tag{7}$$

Si assume che lo spettro delle perturbazioni (almeno entro un certo intervallo di $k$) sia data da una legge di potenza, dove l'esponente $n$ è detto indice spettrale

$$P(k) = Ak^n \tag{8}$$

Notiamo dalla convergenza della varianza (6) che per grandi scale, $k \to 0$, $n > -3$, mentre per piccole scale, $k \to \infty$ si ha $n < -3$.

## A.2 La varianza di massa

Sia $< M >$ la massa media che si trova entro un volume sferico $V$ di raggio $R$

$$\langle M \rangle = \langle \rho \rangle V = \frac{4}{3}\pi \langle \rho \rangle R^3 \tag{9}$$

e si definisce la varianza di massa entro $V$ la quantità

$$\sigma_M^2 = \frac{\langle \delta M^2 \rangle}{\langle M \rangle^2} \tag{10}$$

con la media fatta su tutti i volumi $V$ dello spazio, e usando la decomposizione in serie di Fourier (3) la precedente diventa

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{V} \sum_{\vec{K}} \delta_k^2 W^2(kR) \tag{11}$$

dove la funzione $W(kR)$ è detta la funzione finestra. Passando al continuo nello spazio dei numeri d'onda la varianza di massa, dal (7) risulta

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) W^2(kR) k^2 \, dk \tag{12}$$

## A.3 Lo spettro primordiale

Indichiamo lo spettro primordiale con

$$P(k; t_p) = A_p k^{n_p} \tag{13}$$

dove l'ampiezza $A_p$ e l'indice spettrale $n_p$ possono dipendere da $k$ stesso, e entro un intervallo di $k$ possono considerarsi costanti, e quindi allo spettro (13) corrisponde un varianza di massa

$$\sigma_M(t_p) = K_p \left( \frac{M}{M_h} \right)^{-(3+n_p)/6} \propto M^{-\alpha_p} \tag{14}$$

dove $M_h$, una massa di riferimento, assumiamo pari alla massa dell'orizzonte al tempo $t_p$. Su scala delle galassie l'ampiezza della varianza corrispondente ad un indice spettrale primordiale $n_p = 2$ è troppo bassa e quella della varianza corrispondente a $n_p = 0$ risulta troppo alta.

Lo spettro[4] con $n_p = 1$ (e il valore[5] di $K_p \simeq 10^{-4}$ corrispondenta ad una varianza

$$\sigma_M(t_p) = K_p \left( \frac{M}{M_h} \right)^{-2/3} \tag{15}$$

è detto spettro di Zeldovich. Esso gode della proprietà che le corrispondenti fluttuazioni della metrica (proporzionali alle fluttuazioni del potenziale gravitazionale $\delta\phi(r)$, sono indipendenti dalla scala $r$. e inoltre $\delta\phi(r)$ rimane costante durante il periodo in cui è fuori dell'orizzonte.

Fluttuazioni corrispondenti alla (15) entrano ell'orizzonte cosmologico con un valore costante della varianza e pari a $K_p$ ed è quindi detto anche spettro di cosmological white-noise o con invarianza di scala. Uno spettro approssimativamente di Zeldovich sorge durante un processo inflazionario da fluttuazioni quantistische su scale microscopiche.

[4] Proposto da Harrison, Peebles e Zeldovich

[5] Proposto da Zeldovich

# B La storia (semplificata) dell'universo.

1. Big Bang

2. Era di Planck, $R < 10^{-50} cm$

   Le forze (elettrica, debole, forte e gravitazionale) sono unite. Teoria della gravità quantistica e dei "superstring".

3. Era dell'inflazione, $t = 10^{-43}$.

   La gravità si "congela", cioè si separa dalle altre forze.

4. Era delle GUT, $t = 10^{-35}$ sec.

   Le forze forti si separano dalle forze elettrodeboli. L'universo è un "electron-quark soup". L'universo subisce una transizione di fase verso la fine dell'era GUT, le regioni super-raffreddate sono in un vuoto falso e quindi si espnadono dovute ad una forza repulsiva.

   Senza l'inflazione la piattezza dell'universo (cioè $\Omega_o = 1$) sarebbe una straordinaria coincidenza. Le fluttuazioni del campo quantistico diventano i semi delle strutture cosmiche.

   L'inflazione prevede che la materia raggiunga la densità critica, ma per poter avere le proporzioni giuste degli elementi leggeri (idrogeno, deuterio, elio e litio) i barioni non possono superare il 10% (altrimenti l'elio sarebbe troppo), quindi la materia dev'essere non barionica (e scura, cioè non può interagire facilmente con la materia altrimenti sarebbe più facilmente rilevata).

   Effettivamente che ci sia più materia di quello che si può vedere è anche suffragato dalla velocità delle stelle attorno alle galassie.

   Se la "materia scura" sia composta di neutrini è difficile da verificare, non sappiamo ancora se hanno massa e come avrebbero fatto a costituire le strutture (galassie)?

   Alcuni teorizzano l'esistenza di "reliquie" dall'era di GUT, per esempio nella teoria di supersimmetry. La maggior parte dell'universo potrebbe quindi essere composto di qualcosa ben diverso dalla materia "locale". Un problema con la materia fredda come candidata è che avrebbe dovuto lasciare un'impronta maggiore sulla radiazione di fondo cosmico.

5. Era della nucleosintesi, $t = 1$ sec.

   Si separano le forze elettriche e le forze deboli. I quark si combinano formando protoni, e questi con gli elettroni formano i neutroni.

6. Era del disaccoppiamento, $t = 1.6 \cdot 10^{13}$ sec. (500,000 years)

   Si disaccoppia la materia dalla radiazione, l'universo diventa trasparente, la radiazione (ultimo scattering) sarà rilevabile come fondo cosmico.

7. $t \simeq$ un millione di anni.

   Nascono le protogalassie che però non sono rilevabili attualmente. (Nella teoria di "textures" si cominciano già a formare galassie.)

8. $t \simeq$ un miliardo di anni.

   Le galassie e quasar più lontane attualmente rilevabili.

9. $t \simeq$ tre miliardi di anni.

   Si formano la maggior parte delle galassie, inclusa la Via Lattea. Mentre la distribuzione su grande scala sembra essere omogenea, su scala delle galassie è tutt'altro che omogenea. Per alcune delle strutture più grandi non c'è stato tempo sufficiente perchè la forza gravitazionale possa aver creato le strutture come "the Great Wall".

   Uno dei successi della CDM, insieme all'inflazione, è che concorda con le osservazioni di un raggruppamento delle galassie su scala inferiore alla separazione media fra di loro (dopotutto la forza gravitazionale domina il "clustering" e questo tende a diminuire le differenze fra le varie teorie, e sarà allora su scala più grande che si potrebbero distinguere le teorie alternative.

   Un'alternativa all'ipotesi della materia fredda per la creazione di strutture sono le stringhe cosmiche (difetti topologici, cioè quando si rompe la simmetria direzionale possono sussistere dei difetti nella fase di rottura di simmetria). Un'altra alternativa associata ai difetti topologici sono le "textures".

10. $t \simeq$ otto miliardi di anni.

    Si formano il sole e i pianeti

11. $t_o$, Esiste la vita sulla terra.

# References


[1] François R. Bouchet, David P. Bennett, Albert Stebbins *Patterns of the cosmic microwave background from evolving string networks*. Nature **335**:410-414 (29 Sept.) 1988

[2] M. Fukugita, C. J. Hogan, P. J. E. Peebles *The history of the galaxies*. Nature **381**:489-495 (6 June) 1996

[3] E. Lega et al. *A morphological indicator for comparing simulated cosmological scenarios with observations*. Astron. Astrophys. **309**:23-29 1996

[4] F. Lucchin *Introduzione alla cosmologia*. Zanichelli, Bologna 1990

[5] F. Melchiorri Corso di Astrofisica, a.a. 1995-1996

[6] J. V. Narlikar *Inflation for Astronomers*. Annu. Rev. Astron. Astrophys. **29**:325-62 1991

[7] T. Padmanabhan *Structure Formation in the Universe*. University Press, Cambridge 1993 (Chapter 4)

[8] P. J. E. Peebles *Principles of Physical Cosmology* Princeton University Press, 1993

[9] Martin White, Douglas Scott, Joseph Silk *Anisotropies in the Cosmic Microwave Background* Annu. Rev. Astron. Astrophys. (preprint) 1994

[10] Ya B. Zeldovich *Structure (Topology) of the Universe*. Comments Astrophys. Sp. Sci. **5**:169-173 1973