Il racconto del più e del meno.

Andrea De Paoli

Introduzione

Ci sono tanti tipi avventure. Ti avranno sicuramente raccontato, o avrai letto avventure nelle favole, racconti, romanzi o libri di storia. Avventure di cavalieri e dame, di esploratori e guerrieri e di figure leggendarie. Ma vi sono altri tipi di avventurieri, di esploratori e visionari. Le loro avventure, però, erano con il pensiero, e l'immaginazione. Non per questo più facili di altre avventure, e inoltre, per poter raggiungere i loro obbiettivi hanno anche dovuto spesso faticare e lottare contro tante avversità.

I libri di storia sono pieni di re e di generali, ma purtroppo parlano poco di quelle persone che più hanno contribuito a cambiare davvero il nostro modo di vivere e di pensare, che non sono stati pochi: i matematici e gli scienziati.

E le loro storie sono tante e diverse. C'è chi aveva una famiglia numerosa, come Eulero, sposato due volte con tredici figli. Perse l'uso di un occhio, e non si fermò certo per questo, poi divenne cieco del tutto, ma continuò lo stesso per quasi vent'anni a lavorare e scrivere, dettando quello che voleva scrivere. I suoi scritti di matematica riempiono più di cento volumi, scritti spesso mentre badava ai i figli e nipotini che giocavano dove lavorava.

Altri, invece con una vita molto corta e tragica, come Galois, che scrisse gli ultimi appunti di matematica la sera prima di morire, a vent'un anni, costretto in un duello che sapeva che non sarebbe stato capace di vincere. (Per fortuna i duelli sono stati aboliti.)

Oppure come Ipatia, molto bella e colta, che dirigeva uno dei centri di studio più grandi del mondo (la biblioteca di Alessandria), che fu ammazzata nel 415 a.c. da un gruppo di cristiani, perchè lei era pagana. Dopo di lei si può veramente dire che non vi fu più scienza o matematica in Europa fino al Rinascimento (ai tempi di Keplero, quasi mille anni dopo).

Alcuni erano un pò scontrosi e chiusi come Newton, o aperti e gioviali, come Leibniz. Alcuni famosi nel loro tempo, come Archimede, più di duemila e duecento anni fa, che inventò tantissimi strumenti e fece tantissime scoperte matematiche. Lui inventò la cosidetta "vite di Archimede" che si usa tutt'oggi in molte parti del mondo per estrarre acqua, e fece molte invenzioni per difendere la sua città dalle navi romane, al punto tale che i soldati romani avevano paura di attaccare la sua città. Ogni volta che vedevano spuntare un bastone o una corda dalle mura della sua città scappavano via nella paura che fosse una'altra invenzione di Archimede.

C'era Sophie Germain, all'inizio del secolo scorso, che non potendo entrare in classe ascoltava le lezioni da dietro una porta: perchè era proibito alle donne imparare la matematica. Lei riuscì, con l'aiuto di alcuni colleghi che gli passavano gli appunti, a diventare una dei più rispettati matematici del suo tempo.[1] Vorrei tanto parlarti di queste persone famose, e certo molto più in gamba di molti guerrieri e imperatori, e le cui conquiste ci hanno permesso di vivere meglio e di conoscere il mondo intorno a noi un pochino di più ma in questi racconti vorrei parlare di matematica e non dei matematici (anche se ogni tanto ricorderò qualcosa di alcuni di loro).

Nella matematica, come nella musica o la pittura, ci vogliono anni di esercizio e studio per acquisire quella padronanza di un esperto. Però, come la musica, anche chi non è matematico, con molta pazienza, può imparare ad apprezzarla.

[1] Per fortuna sembra che oggi ormai si capisce che non è vero che le donne non possono fare la matematica.

Capitolo 1

Pensare

Abbiamo parlato un pò del pensiero. Ma cosa sono i nostri pensieri? Si trovano da qualche parte, possiamo, cioè scoprire *dove* si trovano?

Fermiamoci un attimo.

Immagina un cavallo bianco con una lunga criniera. Ora immagina questo cavallo in un enorme prato, vicino ad un bosco. Chiudi gli occhi e immagina che tu lo stia cavalcando verso un castello in cima ad una collina in lontananza.

Esiste tutto questo che stai immaginando?

E se esiste è qualcosa che si trova dentro il cervello? Non ci sarà però mica una piccola collina, con un piccolo castello e cavallo bianco davvero dentro il tuo cervello.

Ma allora questa immagine, che cosa è? e dove si trova?

Non è facile rispondere a questa domanda. Ma questa capacità di immaginare, di pensare, è la stessa che si usa quando si inventa una canzone, si crea un disegno o si scrive una favola. Volgio che tu impari ad usare la tua immaginazione, che è quello che usano gli scienziati e matematici per capire meglio il nostro mondo.

Spesso si cerca di "immaginare" quello che vogliamo disegnare o mettere a musica prima di farlo.

Quindi anche se non sappiamo "dove" si trovano i pensieri, e neanche cosa "sono"; le cose che immaginiamo, la fantasia ci serve per poi creare cose vere, che esistono.

La stessa fantasia serve quando si esplora il mondo intorno a noi, per esempio per capire come fanno a "camminare" le lumache, o come mai soffiando sulla minestra si raffredda. Perchè alcune cose galleggiano e altre no?

Come mai il cuore batte continuamente? Cosa fanno le formiche dentro il loro formicaio o a cosa pensa un gatto quando osserva un ucellino? Quanto sono lontane le stelle e di che cosa è fatto il sole e come sarà camminare sulla luna? E tutte le altre domande che ti vengono in mente. Perchè per capire molte cose aiuta ad immaginare quello che sta succedendo.

Quindi con il pensiero, con la fantasia Mozart scrisse le sue opere, Bach i suoi concerti . Così come Da Vinci fece i suoi disegni e Michelangelo le sue sculture, anche Archimede, più di duemila e duecento anni fa, costruì le sue invenzioni. Così Keplero dimostrò che i pianeti girano intorno al sole e Galileo dimostrava che gli oggetti tendono a cadere con la stessa accelerazione. Harvey era riuscito a capire che il cuore era come una piccola ma potente pompa che fa scorrere il sangue nelle vene e arterie. Newton dimostrò che la forza che fa cadere un sasso è la stessa che tiene la luna intorno alla terra. Con il pensiero Maxwell riuscì a scoprire che le onde di luce e le onde elettromagnetiche sono la stessa cosa.

Con la stessa fantasia, non molti anni fa, alcuni scienzati riuscirono a capire che tutta la materia che ci circonda e di cui siamo fatti fu creata all'interno delle stelle. Le stelle sono come dei giganteschi forni della natura che aiuta a creare da atomi molto piccoli tutti gli atomi più grandi di cui siamo fatti noi, di cui è fatto il foglio che leggi, e quello che fa suonare la musica che ascolti.

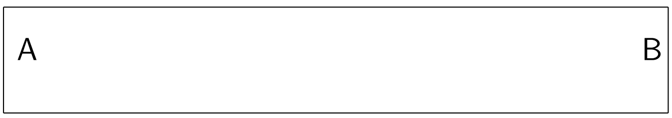
E con la fantasia e l'immaginazione si può anche esplorare e immaginare non solo il mondo che noi vediamo ma anche il mondo dei pensieri stessi. on il pensiero si può anche esplorare il pensiero! Uno modo di farlo e con la matematica. La matematica non è solo fare somme e e divisioni, come vedremo più avanti, ma anche esplorare il modo di pensare, e un modo di esplorare il mondo intorno a noi.

Capitolo 2

Una striscia di carta

Prendi tre o quattro semplici striscie di carta come quella disegnata qui sotto. Anche se non sono esattamente come questa, basta che non siano troppo strette (che dovremo tagliarle lungo il centro) e neanche troppo larghe (perchè dovremo piegarle).

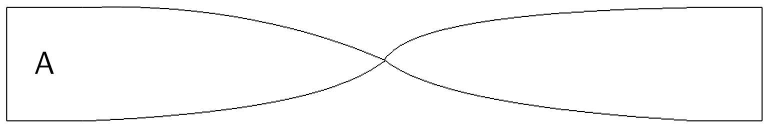
Su una delle strisce metti una piccola A da una parte, e una B dall'altra, sempre nello stesso lato, così:



Ora forma un'anello con la striscia in modo che il lato A tocchi il lato B.

Ora taglia l'anello lungo il centro, e come ci si può aspettare, si forma così due anelli.

Che cosa succede se invece si gira il foglio in modo che quando riunisci i due estremi il lato A è sotto e il lato B è sopra?



Prima di tagliare questo anello lungo il centro proviamo ad osservarlo un pò meglio.

Prima di tutto, quanti lati ha quest'anello? Per trovare la risposta segui con il dito partendo dalla "A", e vedrai che dopo un pò arriverai al lato opposto, e dopo un altro pò di tempo ritornerai alla "A". Quindi questo anello ha un lato solo (e infatti ha perfino un solo bordo come potrai vedere per conto tuo).

Il primo anello aveva due lati e due bordi, e tagliandolo avevamo creato altri due bordi, e quindi ci siamo trovato due anelli. Ora, invece, questo anello ha un solo bordo, tagliando lungo il centro gli si crea un'altro bordo, e quindi dopo ne avrà due. Allora può darsi che tagliando lungo il centro ci troveremo sempre un solo anello. Prova a scoprire adesso che cosa succede.

Capitolo 3

Perchè tutti quei simboli?

Magari all'inizio si usava solo per contare le pecore, oppure per fare scambi si contavano i sacchi di grano o quante frecce uno aveva. Certo la matematica aveva iniziato così, per prima cosa agli esseri umani non serviva molto la matematica.

Magari un cacciatore aveva un cane con dei cuccioli. Allora il cacciatore voleva dare un cucciolo ad ognuno dei suoi figli. Come faceva a sapere se aveva abbastanza cuccioli? Poteva prendere il primo cucciolo e darlo al primo figlio, il secondo cucciolo e darlo al secondo figlio, e il terzo cucciolo al terzo figlio . . . e così via. Se un figlio non aveva un cucciolo allora c'erano meno cuccioli che figli, se qualche cucciolo invece era rimasto con la mamma allora erano più cuccioli che figli. E se invece non c'erano più cuccioli e tutti i figli avevano un cucciolo? Certo, c'era un numero uguale di cuccioli e figli. Quindi, ecco un modo di vedere se ci sono abbastanza cuccioli senza dover contare.

Pero se voleva contare 173 pecore, magari da dare o vendere ad altrettante persone nello stesso modo, la faccenda si presentava un pò più lunga e complicata.

Ma per molti anni i primi esseri umani non si preoccupavano di queste cose. Avevano ben altro a cui pensare. Come non esseri sbranati da qualche animale selvaggio, dove trovare della frutta o qualcosa da cacciare, e via dicendo. Ma dopo molti molti anni le cose incominciarono a cambiare e trovarono un pò di tempo libero per pensare.

A proposito, quanti anni sono passati da quando le prime persone camminavano sulla terra? Circa 200,000 (duecento mila) anni. Proviamo ad immaginare cosa vuol dire duecento mila anni fa. Immaginiamo che tu abbia una tua amica della stessa età, e che quando era nata sua mamma avesse avuto vent'anni. Quando però era nata sua mamma, sua nonna avesse avuto vent'anni, e quando sua nonna avesse avuto vent'anni ... e così via. Cioè tutte nascevano da una mamma di vent'anni. allora abbiamo:

> la tua amica → sua mamma → sua nonna → sua bisnonna → sua tris-nonna ... → fino alla prima mamma.

Quante generazioni ci sono state da allora? Se dividi 200,000 (anni) per 20 (anni) si trova subito la risposta, sono 10,000 il numero di generazioni. Cioè 10,000 mamme-figlie. Se tu avessi una monetina da cento lire per ognuna generazione si dovrebbe avere una pila alta 20 metri di monetine per averne $10,000$ di monetine.[1]

Un'altra piccola osservazione, prima di tornare ai numeri. C'erano dinosauri quando i primi esseri umani abitavano sulla terra?

La risposta è "no". Gli ultimi dinosauri erano scomparsi circa 65 millioni, cioè $65,000,000$ di anni fa, e si sa che gli esseri umani erano comparsi solo 200 mila di anni fa, cioè $20,000$. Quindi sono passati circa $64,980,000$ (sessantaquattro millioni e novecento ottanta mila) di anni i cui non c'erano più dinosauri ma non c'erano ancora persone sulla terra.

Questi primi esseri umani sicuramente avevano incominciato ad osservare il cielo. Non avevano città, ciminiere, automobili e smog. Non avevano lampade, lampadine e fari di notte. Quindi riuscivano a vedere le stelle e i pianeti durante le notti serene, e si vedeva che le stelle cambiavano posizione durante la notte. Oggi sappiamo che non sono le stelle che si muovono durante la notte, ma è che la terra gira come una trottola. Incominciarono a tenere traccia di quando sorgeva e calava il sole, cioè contavano i giorni.

Dopo molti migliaia di anni scoprirono come coltivare il grano, e molti diventarono contadini. Poco a poco incominciarono a misurare il terreno, per esempio per poter dividere un orto in due o tre parti.

Ma per molto tempo il sistema di scrivere i numeri era ancora molto inadeguato. Il sistema dei numeri e dei simboli che si usa per le operazioni può essere molto importante per poter usare la matematica.

---

[1] Come abbiamo calcolato questo? (L'abbiamo calcolato con i numeri ovviamente, nessuno credo si sia messo a contare dieci mila monete, ne tanto meno a fare una pila di venti metri.) Abbiamo misurato cento monetine e abbiamo visto che fanno una pila alta 20 centimetri. Poi abbiamo diviso $10,000$ per 100 (che fa 100) e quindi sappiamo che ci servono 100 pile (di 20 centimetri l'una) per arrivare ad avere 10,000 monete. Allora 20 centimetri per 100 fa 2,000 centimetri, cioè 20 metri.

Come facciamo noi a sapere com'era la musica di Bach, come si canta una canzone dei Beatles, o com'è la melodia di un compositore di molti anni fa, prima che ci fossero dischi, registratori o altri apparecchi simili? Certo, possiamo leggere uno spartito in cui ci sono scritte le note. Le staffe, note e tutti gli altri simboli su di uno spartito ci permettono di ricostruire la musica che il compositore aveva in mente. E' una forma di scrittura, che ci permettere di dire molte cose in forma molto abbreviata.

Concentrati un'attimo. Prova ad immaginare di far capire per lettera la tua canzone preferita a qualcuno che non l'ha mai sentita! Anche usando i nomi delle note: "do re mi fa sol ..." e qualche convenzione,[2] per esempio quanto devono durare le note, quando si deve fare un respiro o interrompere la musica. Specialmente se poi la canzone è un tantino più complicata, magari con tante voci in tempi diversi. (Hai mai cantato *San Martino campanaro* in coro, ma ognuno iniziando un pó dopo l'altro?)

Certo che facilita molto le cose se sia chi scrive che chi legge abbia studiato e quindi sappia leggere (e scrivere) le note.

Proviamo un'altro esempio.

> Fai la somma di trentaquattro e ventitre, sottrai sette e dividi per due e somma cinque. A questo aggiungi sei e dividi per quattro.

Come si può scrivere in modo più chiaramente questo problema? Certo, usando i simboli, anche se a molti spaventa vedere una formula, in realtà è più facile (se uno ha imparato a usarle s'intende) leggerla cosí:

$$\frac{\left(\left(\frac{(34+23)-7}{2}+5\right)+6\right)}{4}$$

Più avanti vedremo come si può semplificare questo piccolo mostro. Se lo sai già come fare, il numero che ti rimane è divisibile per tre?

Allora, prima di continuare parliamo un pò di simboli e di scrittura per intenderci meglio.

---

[2]convenzione: quando qualcosa si fa in un certo modo non perchè sia meglio ma semplicemente perche un modo bisogna scegliere. Per esempio perchè in alcuni paesi si guida sulla destra e alcuni altri sulla corsia di sinistra? E chiaro perchè. Se non si sceglie una "convenzione" ci sarebbero parecchi scontri. A proposito, ti sei mai chiesto perchè gli orologi vanno in senso "orario"? (Stiamo parlando di quelli con le lancette chiaramente.) Una volta non erano tutti così . I primi costruttori di orologi li facevano andare o in un senso o nell'altro a secondo dei gusti. Poi un pò alla volta si incominciarono a farli sempre di più in un verso che in un'altro. E noi oggi chiamiamo quel verso lì: **verso orario**. Cosi anche il modo di scrivere la musica è una convenzione.

Capitolo 4

Un antico modo di contare

Se vogliamo fare una somma "tre più sette" scriviamo

$$3 + 7$$

e possiamo inoltre scrivere

$$3 + 7 = 10$$

per far vedere che sappiamo anche quanto fa.

Sicuramente tu sai già che questo si potrebbe scrivere in un'altro modo, per esempio con dei trattini per ogni oggetto che contiamo. Poi useremo uno strano simbolo $\oplus$ per dire "*sommare i trattini a sinistra con i trattini a destra*". Abbiamo scelto questo simbolo perche il simbolo del più + si potrebbe confondere facilmente con i trattini. (E poi è più carino, non trovi?)

$$||| \oplus ||||||| = |||||||||||$$

ma dopo un po di | ci si incomincerebbe a confondere.

Se invece credi che sia più facile con i trattini che con i numeri prova a fare

$$|||||||||||||||||| \oplus |||||||||||||||||$$

Ma forse si potrebbe rendere le cose più semplici, ma senza usare i numeri, creando un nuovo simbolo, per esempio un $\cup$ per ogni cinque bastoncini:

$$||||| = \cup$$

e quindi la nostra somma originale diventa

$$|||\oplus\cup|| = (?)$$

Cosa mettiamo come soluzione, va bene: $|||\cup||$?
Solo che ora c'è qualche piccola inconvenienza. Se qualcuno somma

$$||||\oplus\cup|$$

il risultato sembrerebbe diverso da quello precedente. Perche adesso

$$||||\oplus\cup| = ||||\cup|$$

Solo contando $|||\cup||$ e $||||\cup|$ si può vedere che sono uguali. Figuriamoci se ci dovesse capitare di capire se questi due numeri sono uguali:

$$||||\cup|||\cup|||||| \quad \text{e} \quad |||||||||||||\cup\cup$$

Vediamo allora se possiamo creare delle regole per fare le somme, così che si può sempre capire se due numeri sono uguali, e magari facilitare anche le cose.

Due regole

1. Quando si ha una lista di simboli si mettono quelli più grandi per primo
2. Ogni cinque bastoncini vanno sostituiti con un segno $\cup$

Per esempio:

$$\begin{array}{lcl}
||||\cup|||\cup|||||| & = & \\
\cup\cup||||||||||||| & = & \text{per regola numero 1} \\
\cup\cup\underbrace{|||||}_{\cup}\underbrace{|||||}_{\cup}||| & = & \text{regola numero due} \\
 & = & \\
\cup\cup\cup\cup||| & = &
\end{array}$$

Sicuramente anche nell'antichità si fece qualcosa di simile. Furono poi aggiunti altri simboli, per esempio $\cap$ era uguale a $\cup+\cup$ che è uguale a $||||||||||$ e qualcosa come $\mathcal{C}$ per dire $\cap+\cap+\cap+\cap+\cap+\cap+\cap+\cap+\cap+\cap$.
Ora possiamo fare delle somme ancora più complicate e anche più grandi. Per esempio somme come

$$\cap|||\oplus\cap\cup|||\oplus\cap\cap\cup||||\oplus\cap\cap\cap\cup||||\oplus\cap\cap\cup|||$$

Pero adesso dobbiamo cambiare un pò le regole di prima. Abbiamo nuovi simboli, avremo nuove regole.

Quattro regole

1. Quando si ha una lista di simboli si mettono quelli più grandi per primo
2. Ogni cinque bastoncini vanno sostituiti con un segno $\cup$
3. Ogni due $\cup$ si sostituiscono con un $\cap$
4. Ogni dieci $\cap$ si sostiuiscono con un $\mathcal{C}$

Applichiamo questo al nostro esempio di prima:

$\cap||| \oplus \cap \cup ||| \oplus \cap \cap \cup|||| \oplus \cap \cap \cap \cup |||| \oplus \cap \cap \cup|||$
sommando
$\cap|||\ \cap \cup|||\ \cap \cap \cup ||||\ \cap \cap \cap \cup||||\ \cap \cap \cup |||$
applicando regola 1
$\cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap\ \cup \cup \cup \cup |||||||||||||||||$
ragruppiamo
$\cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap\ \cup \cup \cup \cup\ \underbrace{|||||}\,\underbrace{|||||}\,\underbrace{|||||}\,||$
trasformiamo ogni cinque trattini
$\cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap\ \cup \cup \cup \cup\ \cup \cup \cup\ ||$
ragruppiamo le u
$\cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap\ \underbrace{\cup\cup}\,\underbrace{\cup\cup}\,\underbrace{\cup\cup}\,\cup||$
applichiamo regola 3
$\cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap\ \cap \cap \cap \cup||$
ragruppiamo di nuovo $\underbrace{\cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap \cap}\cap \cap \cup||$
applichiamo regola 4
$\mathcal{C} \cap \cap \cup ||$
finito

Come ci mostrano i nostri esempi però questo sistema non è molto pratico se qualcuno deve fare molti calcoli o se deve usare numeri molto grandi.

Adesso non voglio stare qui a spiegare tutta la storia di come sono nati i simboli, e tutti i numeri moderni (sarà per un'altro libro), fatto sta che i nostri simboli 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 sono molto più convenienti di $|\ \cup\ \cap$. Con questi simboli possiamo contare qualunque numero di oggetti.

Possiamo fare, per esempio 5 pecore più 4 pecore, oppure 5 foglie più 4 foglie, oppure 5 gatti grigi con occhi gialli più 4 gatti grigi con occhi gialli. Basta che facciamo $5 + 4$ e troviamo la soluzione. Certo è più facile se non scriviamo che **cosa** stiamo sommando, e quindi (ecco un'altra convenzione) quando facciamo una somma, come $5 + 4$, in realtà senza dirlo i due numeri sono due numeri della stessa cosa. Altrimenti sarebbe come fare 7 piatti d'argento più 2 coccodrilli. Non fa certo 9 coccodrilli d'argento, e neache 9 piatti con i denti. Noi non possiamo sommare cose diverse.

Capitolo 5

Cosa c'è prima dello *zero* ?

Se su uno scafale ci sono nove libri non ne puoi certo togliere dodici, o quindici, ne puoi togliere al massimo nove. "Bella scoperta." starai pensando. Quindi non possiamo fare $9 - 12$, o $9 - 15$. E probabilmente a nessuno gli era mai saltato in mente di fare un cosa del genere per millioni di anni!

Ma poco a poco il dubbio veniva a qualcuno. Pensa un po, se misuro la temperatura e trovo che sia 15 gradi, e poi metto il termometro nel frigorifero e ti dico che la temperatura è scesa di 20 gradi, quanto sarà la temperatura nel frigorifero? Semplice $15 - 20 = -5$. Quel segnetto davanti al cinque ci dice che è un numero *negativo*. Certo, un cavallo meno tre cavalli non vuol dire granchè, ma in certi casi invece è utile avere il concetto di numero negativo. Però i primi che gli usarono non erano molto contenti di questi "strani" numeri. (Almeno per loro erano strani, ma oggi ci sembrano numeri normali.) Uno dei primi ad usarli era un matematico italiano, Gerolamo Cardano nel 1500.

Capitolo 6

Prima di incominciare

Quando facciamo una somma, per esempio $7+3$ o $2756+5428$, usiamo delle regole che abbiamo imparato molto presto, e le usiamo senza quasi accorgerci. Prendiamo quella seconda somma,

$$\begin{array}{rl} 2756 & + \\ 5428 & = \end{array}$$

Facciamo prima la somma $6+8$, e questo ci da 14, noi scriviamo però solo 4, e "riportiamo" l'uno. Perchè?

Perchè noi sappiamo (anche se non ce lo ricordiamo, o non ce l'hanno mai spiegato) che il 4 rappresenta quattro e basta, ma quel "1", in realtà, rappresenta un dieci, "10", e va nella seconda colonna, cioè va sommato al $2+5$, (che sarebbero $20+50$), quindi il secondo numero che scriviamo è 8, (sapendo però che in realtà è 80), questa volta non c'è niente da riportare. La terza colonna (il $7+4$ ci da 11. Ma è davvero undici? Pensiamoci un attimo. Come somma finora abbiamo scritto

$$\begin{array}{rl} 2756 & + \\ 5428 & = \\ 84 & \end{array}$$

Quel 11 in realtà è un *mille cento*, 1100, infatti noi scriviamo 184 e riportiamo "1".

Ora però guardiamo che succede se vogliamo fare una somma dello stesso numero più volte, cioè una serie di somme, per esempio

$$3+3+3+3+3$$

Tu saprai benissimo che siccome stiamo sommando il 3 cinque volte, si può scrivere 3×5, e questo ci dà 15. In altre parole, possiamo pensare al prodotto come un modo abbreviato per scrivere una serie di somme. Quindi anche 343×891 è un modo molto veloce di fare la somma di 343 con se stesso ottocento novantun volte. (Se non ci credi che sia più facile a fare il prodotto prova a fare la somma a mano. Credo che dopo un pò sarai d'accordo con me.)

Proviamo ora a fare 7 sommato a se stesso tre volte,

$$7 + 7 + 7$$

e poi, invece, 3 sommato a se stesso sette volte.

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

Cosa hai trovato? Fanno la stessa risposta? Come si scrivono le due somme in modo abbreviato? Certo, la prima è proprio come scrivere 7×3 (sette per tre) e la seconda 3×7 (tre per sette)

$$7 + 7 + 7 = 7 \times 3$$

che viene ad essere uguale a

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 7$$

Infatti tutte due le somme ci danno la stessa risposta. (Se non ti danno la stessa risposta ci sono due possibilità, o hai sbagliato a fare la somma oppure ho sbagliato io a scriverla, però io ho controllato quello che ho scritto e mi sembra corretto.)

Il fatto che puoi scrivere 7×3 oppure 3×7 è molto importante.[1] Sarebbe un bel guaio se quando facciamo 567×18 verrebbe una risposta diversa da quando si fa 18×567. (Anzi sappiamo che vuol dire che abbiamo sbagliato noi proprio perchè ci aspettiamo sempre la stessa risposta quale che sia l'ordine. Ma questo è vero anche quando si fa una somma? Per esempio $13 + 167$ è uguale a $167 + 13$? Certo. Pero dobbiamo stare attenti, alle volte, certe operazioni non sono uguali se si scambia l'ordine.

Se per il compleanno tu ricevi un libro e poi ricevi un golf, ti ritroverai con le stesse cose che se avessi ricevuto prima un golf e poi un libro. Ma

[1] Tanto vero che gli hanno dato un nome a questo fatto, si chiama *commutazione*.

se dipingi la tua stanza azzurro e poi cambi idea e la dipingi rosa avrai una stanza rosa alla fine, che on è certo quello che avresti se prima dipingi la stanza di rosa e dopo la ridipingi di azzurro.

Qual'è un esempio in matematica di un'operazione dove l'ordine è importante? Vediamo ... secondo te, $17 - 12$ è uguale a $12 - 17$? (Speriamo che non ti sia venuta la stessa risposta. Dopo vedremo qualcosa sui numeri come -5, che si chiamano *negativi.*)

Quindi possiamo dire che nella sottrazione non possiamo scambiare l'ordine perchè non sarà sempre uguale la risposta. (Ma non sarà **mai** uguale, o ci sono delle volte che lo sarà? Se scrivo $5 - 5$ è diverso o uguale se si mette prima il secondo 5 e poi il primo?)

Vuoi provare a pensare ad un'altra tra operazione che non ti dà la stessa risposta se scambi i due numeri? (Non è certo la moltiplicazione, perchè sappiamo che possiamo benissimo scambiare i due numeri, per esempio,

$$5 \times 4 = 4 \times 5 = 20$$

Ormai saprai fare anche i prodotti. Anche qui, come per le somme, abbiamo imparato delle regole che spesso non pensiamo mentre le usiamo.

Capitolo 7

Una piccola x (ics)

Interrompiamo un'attimo il discorso. Per quello che faremo in seguito voglio che tu sappia scrivere alcune abbreviazioni (come dicevo prima, se devi scrivere della musica aiuta a sapere leggere e scrivere le note).

Se lo sai già fare questa parte andrà molto in fretta.

Se voglio chiederti cosa fa *ventuno più diciotto?* Una volta non si scriveva $21 + 18 = x$, ma invece "*21 più 18 è uguale a cosa.*"

Infatti non c'era nemmeno il simbolo =, per dire uguale. Il simbolo = e il simbolo più furono usati per la prima volta in un libro da Robert Recorde nell'inizio del 1500 perchè prima si scriveva la parola "*uguale*". Però con i simboli abbiamo anche semplificato le cose.

Oggi se vogliamo dire che stiamo cercando quel numero che otteniamo sommando 21 a 18 scriviamo come abbiamo visto prima:

$$21 + 18 = x$$

dove la x vuol dire che il numero che va in quella posizione è sconosciuto. Allora basta fare la somma e troviamo il valore di x.

Ormai avrai capito benissimo, e potrai scrivere delle cose che per gli antichi erano pieni di misteri. E potrai benissimo fare

$$21 + 7 = x$$

oppure, ancora più lunghe:

$$5 + 11 + 27 + 42 = x$$

Non è tanto diverso se scriviamo $39 - x = 21$. Infatti stiamo solo dicendo che non sappiamo quale numero possiamo mettere al posto della x che si giusto. Ora ci sono vari modi di trovare che numero mettere al posto della x. Posiamo provare a caso. Ma allora come si farebbe a controllare se il numero messo a caso sia quello giusto?

Un altro modo è di sommare x a tutte due le parti dell'equazione.[1] Vediamo un pò. Stiamo cercando il numero che va al posto di x nell'equazione:

$$39 - x = 21$$

se sommiamo una x a tutte due le parti dell'equazione la riscriviamo così

$$39 - x + x = 21 + x$$

perchè sappiamo che se sommiamo la stessa cosa a tutte due le parti di un equazione non cambia.

Certo i numeri cambiano ma comunque il segno uguale va ancora bene: se io e te abbiamo 43 figurine ciascuno, e io ne compro altre quattro e a te ne regalano quattro, io e te avremo tutti e due 47 cartoline. Non è possibile che se io e te abbiamo lo stesso numero di figurine, e poi ognuno di noi ne aggiunge la stessa quantità uno ne abbia più dell'altro.

Così nella nostra equazione, se sommiamo lo stesso numero (noi non sappiamo ancora cosa sia il numero, ma lo chiamiamo x e fa lo stesso.) abbiamo $+x$ a sinistra del segno uguale, e $+x$ a destra. Quindi se poi scopriamo che x era 14, avremo semplicemente aggiunto 14 a sinistra e a destra. Ora pero, guardiamo di nuovo l''equazione:

$$39 - x + x = 21 + x$$

A destra non c'è problema, $21 + x$ è un'espressione che abbiamo visto prima. Ma cosa vuol dire $39 - x + x$? Ebbene, anche questo non è poi così misterioso, vuol dire sottrarre x e aggiungere x al 39. Ma se togli una cosa e poi la sommi di nuovo vuol dire che non hai cambiato molto, anzi non è cambiato per niente. Quindi $39 - x + x$ è proprio 39, allora possiamo togliere $-x + x$ perchè tanto si cancellano. Allora avremo

$$39 = 21 + x$$

Cos'è quel numero che sommato a ventuno ci dà 39? Facciamo un'altro piccolo passo e lo scopriremo subito. Ora sottraiamo 21 da tutte due le parti,

$$39 - 21 = 21 + x - 21$$

[1] Puoi pensare ad un *equazione* come un'espressione dove c'è il segno di uguale, "=".

e con lo steso ragionamento di prima, aggiungendo e togliendo la stessa cosa, vediamo che il ventuno viene sommato e tolto, e quindi la povera x rimane sola:

$$39 - 21 = x$$

Ma è proprio quello che vogliamo, perchè, guarda, se finisci la sottrazione $39 - 21$ ci da 18, e quindi vediamo che al posto di $39 - 21 = x$ scriviamo

$$18 = x$$

che ci dice che x è uguale a 18, quindi abbiamo trovato il numero al posto della x.

Ora è chiaro che potevamo usare qualuque lettera, non c'è niente di magico o speciale nella x, potevamo scrivere $31 + n = 15$, oppure $7 \times p = 21$, e così via. La lettera si usa solo per tenere il posto di un numero.

Capitolo 8

Fare dei quadrati

Scusami, ma devo fare un'altra piccola interruzione.

Faremo in questo modo un'ulteriore passo in avanti. Ti ricordi che avevamo detto prima che fare la moltiplicazione è in realtà un modo di fare una serie di somme?

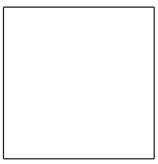
Se chiedo cos'è un numero sommato a se stesso potrei anche dire, facciamo $numero + numero$ e forse mi capiresti lo stesso.

Bene, possiamo anche scrivere una serie di moltiplicazioni in forma abbreviata. Incominciamo con una serie molto corta, anzi cortissima, un numero moltiplicato per se stesso. Noi lo scriviamo 7×7, opppure 5×5, oppure 2513×2513, oppure ... beh, forse bastano come esempi, usando quello che abbiamo imparato prima possiamo scrivere $n \times n$.

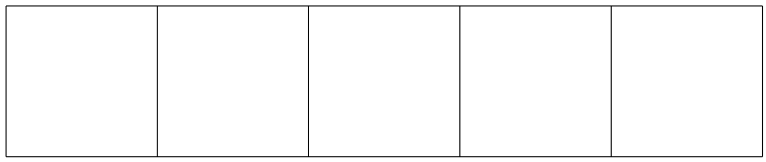
Più avanti vedremo che possiamo scriverlo n^2, che è ua forma abbreviata di $n \times n$. Quindi 2×2 si può anche scrivere 2^2 e allora $2^2 = 4$, e $3^3 = 3 \times 3 = 9$. E 5×5 non e poi così difficile, forse un pochino più lungo sarà calcolrae 157^2 che altro non è che 157×157. (Ti viene 24649?)

I numeri moltiplicati per se stessi, scritti con quel piccolo due in alto si chiamano "*numeri quadrati*". Vediamo un attimo perchè.

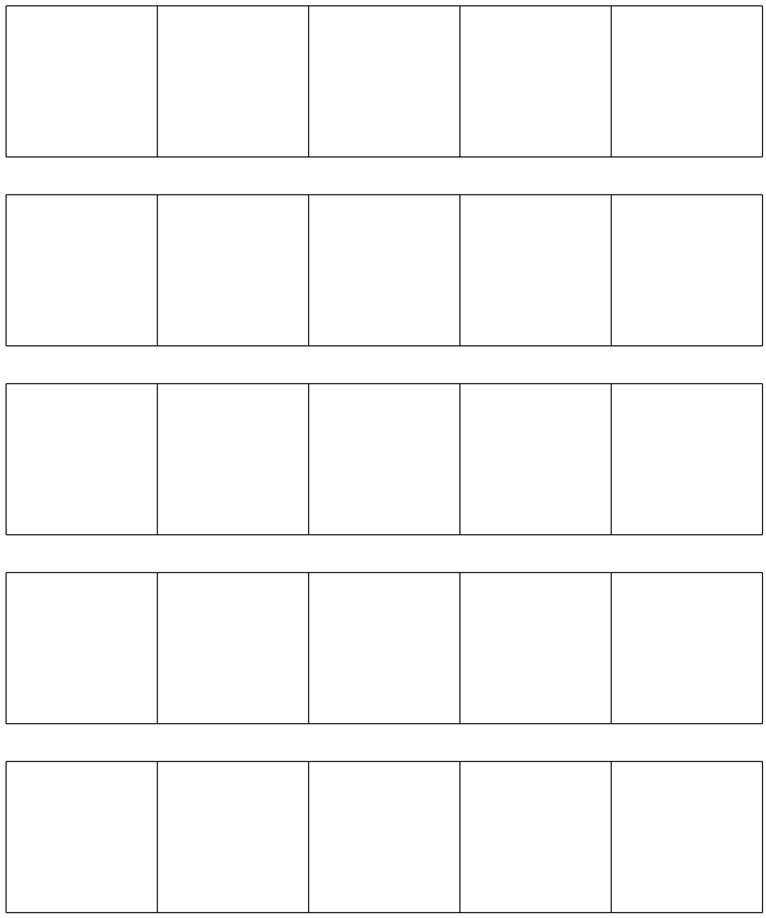
Prendiamo una piastrella.



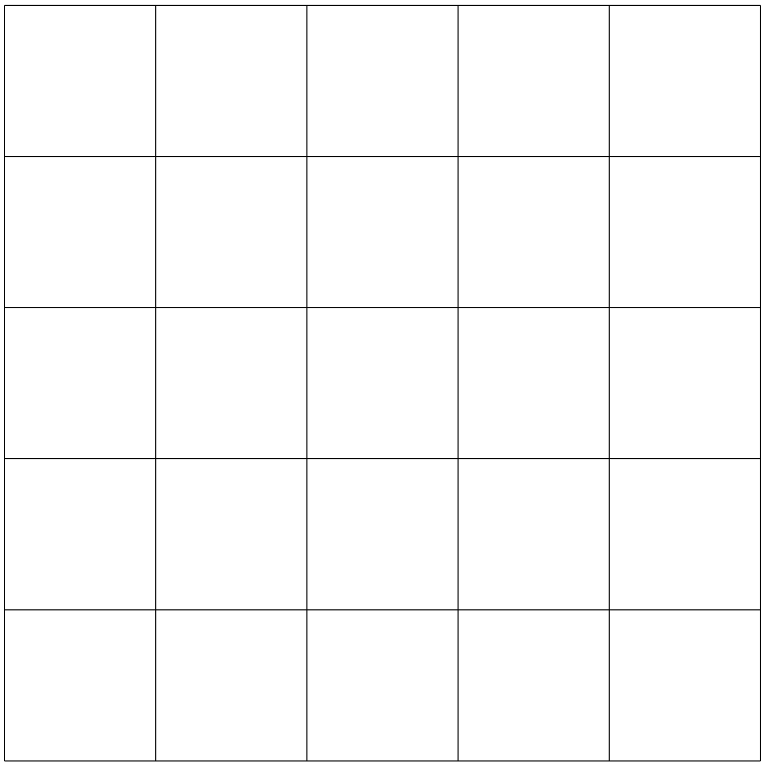
poi la copiamo cinque volte, e otteniamo una fila di cinque piastrelle



e moltiplichiamo questa fila cinque volte, che ci dà cinque per cinque:



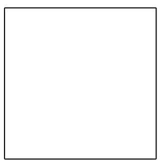
mettendo queste righe una attaccata all'altra si vede meglio che quello che otteniamo è un quadrato, con i lati lunghi 5 piastrelle



e per misurare quante piastrelle ci sono facciamo

$$5 \times 5 = 25$$

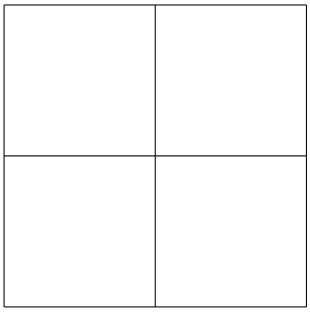
Torniamo all'inizio, prendiamo 1 piastrella sola, una volta sola, avremo



che possiamo scrivere

$$1 \times 1 = 1$$

Allora uno potrebbe pensare che non sia molto interessante che uno per uno faccia solo uno, ma bisogna pur incominciare da qualche parte. Facciamo il prossimo passo e facciamo *due per due* :



e questo, come avrai ormai capito benissimo, si scrive:

$$2 \times 2 = 4$$

Sicuramente potrai ormai continuare senza disegnare le piastrelle,[1] e vediamo che

$$\begin{aligned} 3 \times 3 &= 9 \\ 4 \times 4 &= 16 \\ 5 \times 5 &= 25 \\ 6 \times 6 &= 36 \\ 7 \times 7 &= 49 \\ 8 \times 8 &= 64 \\ 9 \times 9 &= 81 \\ 10 \times 10 &= 100 \end{aligned}$$

Tra questi avrai riconosciuto il nostro primo esempio, 5×5. Questi numeri che abbiamo trovato, moltiplicando un numero con se stesso,

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 \ldots$$

e così via, si chiamano *numeri quadrati.*

[1]Ma se ti aiuta prova un pò a disegnarle, male non fa. Basta prendere un blocco notes con i quadrettini e fare come abbiamo fatto prima. Spesso nellamatematica è molto utile anche disegnare o cercare di vedere qualche esempio di quello che si sta cercando di fare.

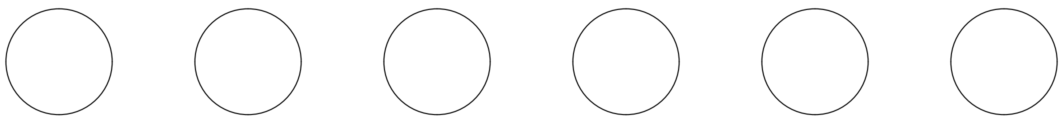
Capitolo 9

I pari e dispari

Quando hai imparato a fare la divisione, sicuramente il tuo libro di esercizi era pieni di problemi del tipo:

- Quanto fa diciotto diviso tre.
- Quanto fa 6 diviso 2.
- Dividi 12 per quattro.

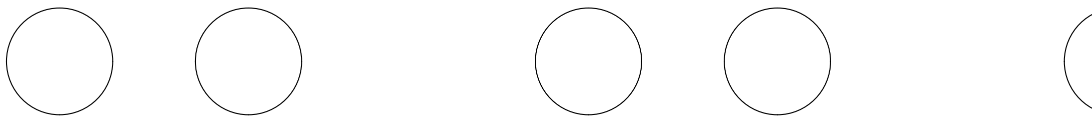
Sciegliamo uno di quei problemi. *Quanto fa 6 diviso 2?* E proviamo a risolverlo.



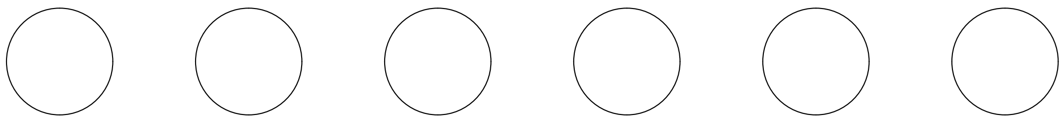
Se dividiamo questo in due pile avremo:

Si può anche risolvere prendendo i cerchi due a due e vedere quante gruppi (di due) troviamo. Io trovo questo metodo più semplice. Magari a te piace più il primo, o ne hai un'‘altro che trovi ancora più chiaro. Vediamo come funziona con il nostro problema.

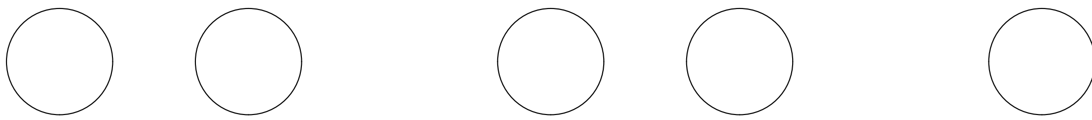
6/2 sei diviso due



Vediamo che ci sono **tre** gruppi di due. Proviamo ora a fare *nove diviso due*.



e proviamo (con il metodo che piace a me, se vuoi prova con il tuo), e quindi prendendo due a due abbiamo:



Questa volta ci rimane **un** cerchietto, quindi 9/2 fa quattro (più uno di resto).